Propiedades generales de la matriz de dispersión

Aquí se consideraa matriz de dispersión [S] de dispositivos de microondas que son lineales y sin pérdidas. La primera propiedad se demuestra por el uso del principio de conservación de energía, aplicado a la transmisión a través de uniones sin pérdidas.

Suponga que una onda de voltaje unitario se incide en el puerto 1 de un dispositivo de n-puertos y también que ninguna otra onda se incide en los restantes (n–1) puertos. Entonces, la potencia que entra en el dispositivo, P_i es dado por

$$P_i = a_i a_i^* \qquad (1)$$

Recuerde que cuando se ve la matriz de dispersión se trabaja de forma separada con ondas de voltaje incidentes y salientes del dispositivo. Las ondas incidentes se escriben como "a" y las salientes como "b". Luego la potencia llevada por la k-ésima onda, a_k, está dada por $P_k = a_k a_k$*. Entonces los coeficientes de dispersión se define de tal manera que la onda de voltaje b_i saliendo del puerto "i" debido a una onda de voltaje a_j que incide en el puerto "j" es

$$b_i = S_{ij} a_j \qquad (2)$$

En el caso general cuando una onda de voltaje se incide en todos los puertos, cada onda incidente hará una contribución al onda total resultante que sale del puerto "i" (y en general en todos los puertos:

$$b_i = S_{i1} a_1 + S_{i2} a_2 + \ldots + S_{in} a_n \qquad (3)$$

La potencia que sale del puerto "j" es P_j, donde

$$P_j = b_j b_j^* \qquad (4)$$

Entonces por la conservación de energía, se tiene

$$a_1 a_1^* = b_1 b_1^* + b_2 b_2^* + \ldots + b_n b_n^* \qquad (5)$$

Pero según (2), $b_i = S_{i1} a_1$ donde S_{i1} es el coeficiente de dispersión conectando el puerto "i" al primer puerto. Entonces,

$$a_1 a_1^* = (S_{11} a_1)(S_{11} a_1)^* + (S_{21} a_1)(S_{21} a_1)^* + \ldots + (S_{n1} a_1)(S_{n1} a_1)^* \qquad (6)$$

$$1 = S_{11} S_{11}^* + S_{21} S_{21}^* + \ldots + S_{n1} S_{n1}^* \qquad (7)$$

De igual manera la suma de las amplitudes cuadradas de cualquier fila o columna de la matriz de dispersión es unitario.

$$1 = \Sigma_j\, S_{ij} S_{ij}^* = \Sigma_j\, |S_{ij}|^2 \qquad (8)$$

Otra propiedad de la matriz de dispersiónse puede derivar del principio de la conservación de energía expresada para la operación general con ondas incidentes y salientes en cada puerto. Entonces $P_i = P_s$ (donde P_s = potencia saliente) toma la forma:

$$\Sigma_j\, a_j a_j^* = \Sigma_k\, b_k b_k^* \qquad (9)$$

Si se sustituye $b_k = \Sigma_k\, b_k b_k^*$ en el c. c. de esta ecuación a la derecha de (9), se tiene

$$\Sigma_j\, a_j a_j^* = \Sigma_j\, (\Sigma_k\, S_{jk} S_{jk}^*) a_j a_j^* + [\Sigma_m' \Sigma_n\, (\Sigma_j\, S_{jm} S_{jn}^*) a_m a_n^*] + [\Sigma_m' \Sigma_n\, (\Sigma_j\, S_{jm} S_{jn}^*) a_m a_n^*]^* \qquad (10)$$

donde Σ' significa que la suma $m = n$ no está incluida.El primer término de la derecha se puede simplificar usando (8). Los otros dos términos son de la forma $A + A^* = 2\mathrm{Re}A$. Entonces la ecuación (10) se vuelve

$$\Sigma_j\, a_j a_j^* = \Sigma_j\, a_j a_j^* + 2\mathrm{Re}\Sigma_m' \Sigma_n\, (\Sigma_j\, S_{jm} S_{jn}^*) a_m a_n^* \qquad (11)$$

ó $$0 = 2\mathrm{Re}\Sigma_m' \Sigma_n\, (\Sigma_j\, S_{jm} S_{jn}^*) a_m a_n^* \qquad (12)$$

Las propiedades son iguales irrespectiva de qué combinación de ondas que se envían dentro del dispositivo. Entonces (12) es válida si se transmiten dos ondas a_1, a_2 en los puertos 1, 2 con los demás $a_j = 0$.

La ecuación (12) se vuelve:

$$0 = 2\mathrm{Re}(S_{11} S_{12}^* + S_{21} S_{22}^* + S_{31} S_{32}^* + \ldots + S_{n1} S_{n2}^*) a_1 a_2^* \qquad (13)$$

Como las fases de las ondas a_1, a_2 son arbitrarias, entonces lo que está en paréntesis debe igual a cero:

$$0 = S_{11} S_{12}^* + S_{21} S_{22}^* + S_{31} S_{32}^* + \ldots + S_{n1} S_{n2}^* \qquad (14)$$

La ecuación (14) consiste de la suma de los miembros de la primera columna de la matriz de dispersión multiplicados por el c. c. de los miembros correspondientes de la segunda columna de la matriz de dispersión que es igual a cero. De igual manera, se puede demostrar la condición análogca que concierne cualquier par de columnas de la matriz de dispersión, ya que la matriz es simétrica por el diagonal principal, que cualquier dos filas se combinan de igual manera para dar el resultado de cero.